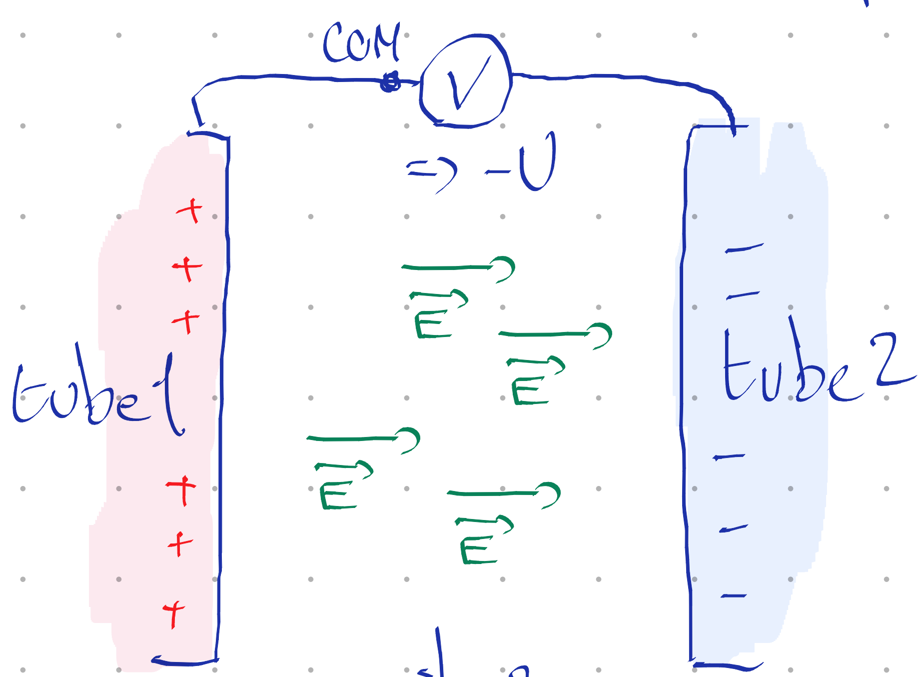
LINAC

1. En sortie du tube 1, le champ électrique devra passer dans le sens des x pour continuer à accélérer le proton $\Rightarrow$ la tension entre le tube 2 et le tube 1 devra passer à $-U$.

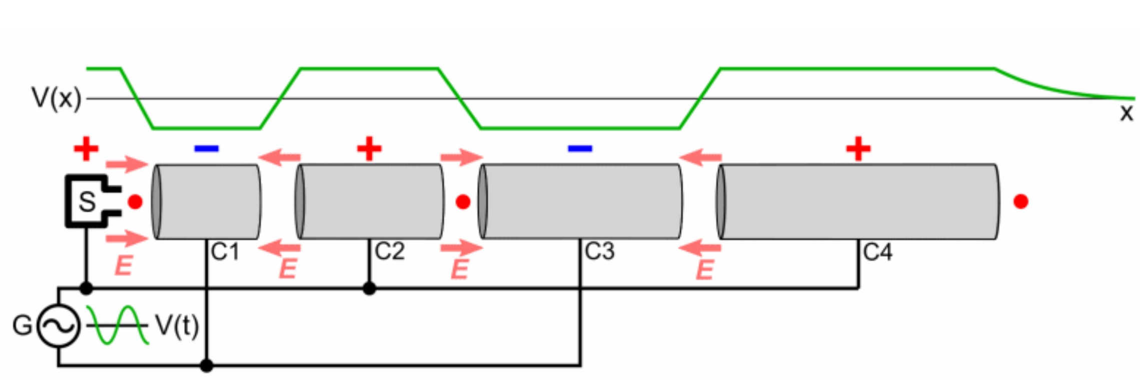


cavité 2
≃ condensateur plan

Or la tension alternative en créneau utilisée change de signe toutes les demi-périodes $T/2$. Le proton doit donc sortir du tube 1 au bout de $T/2$, soit :

$$\frac{T}{2} = \frac{1}{2f} = \frac{1}{50{,}0 \times 10^{6}} = 20{,}0 \times 10^{-9}\,\text{s}$$

$$= 20{,}0\ \text{ns}$$



https://fr.wikipedia.org/wiki/Accélérateur_linéaire#/media/Fichier:Linear_accelerator_animation_16frames_1.6sec.gif

2. Déterminons les équations horaires du mouvement dans la cavité 1.

D'après la 2e loi de Newton :

$$m \vec{a} = \sum \vec{F_{ext}}$$

Ici, on néglige toutes les forces à l'exception de la force électrique.

$$\Rightarrow m_p \vec{a} = + e\vec{E}$$

e est la charge électrique élémentaire = charge d'un proton

$$\Rightarrow \begin{cases} a_x(t) = \dfrac{eE}{m_p} \\ a_y(t) = 0 \\ a_z(t) = 0 \end{cases}$$

On primitive pour obtenir la vitesse :

$$\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{eE}{m_p} \times t + C_1 \\ v_y(t) = C_2 \\ v_z(t) = C_3 \end{cases}$$

On détermine les constantes d'intégration grâce à la vitesse initiale :

$$\vec{v}(0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_1 = C_2 = C_3 = 0$$

$$\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{eE}{m_p} t \\ v_y(t) = 0 \\ v_z(t) = 0 \end{cases}$$

Enfin, on primitive pour obtenir la position :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2} \dfrac{eE}{m_p} t^2 + C'_1 \\ y(t) = C'_2 \\ z(t) = C'_3 \end{cases}$$

On obtient les constantes d'intégration grâce à la position initiale :

$\overrightarrow{OM}(t=0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (on place l'origine du repère à l'entrée dans la cavité)

$\Rightarrow C'_1 = C'_2 = C'_3 = 0$

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2} \dfrac{eE}{m_p} t^2 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

Cherchons l'instant t_c où le proton sort de la cavité 1 :

Il faut résoudre $x(t_c) = d$ ← longueur de la cavité

$$x(t_c) = d \Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{eE}{m_p}t_c^2 = d$$

$$\Rightarrow \quad t_c = \sqrt{\frac{2d\,m_p}{eE}}$$

et comme $E = \frac{|U|}{d}$

$$t_c = d \times \sqrt{\frac{2m_p}{eU}}$$

On peut maintenant aussi déterminer la vitesse atteinte par le proton à la sortie de la cavité 1 = à l'entrée du tube 1.

Pour cela, on injecte t_c dans l'équation horaire de la vitesse :

$$v_x(t_c) = \frac{eU}{m_p d} \times d \times \sqrt{\frac{2m_p}{eU}}$$

$$= \sqrt{\frac{2eU}{m_p}}$$

Aucun champ ne règne dans les tubes métalliques qui agissent comme des cages de Faraday*

Puisqu'on néglige les autres forces, il n'y a donc aucune force dans les tubes.

* https://youtu.be/ILK_JWI-uW0?si=FRNJZExnAB25HJdK&t=691

La 1ère loi de Newton nous dit alors (en considérant le référentiel terrestre comme galiléen) que le mouvement du proton est rectiligne uniforme tout le long du tube. Le proton conserve donc la vitesse $v_x(t_c) = v(t_c)$* dans le tube.

Par conséquent, le temps passé dans le tube vaut

$$t_t = \frac{L}{v(t_c)}$$

longueur du tube L (ce qu'on cherche)

* comme les composantes de $\vec{v}$ dans les 2 autres directions sont nulles, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = |v_x|$

Or on veut : $t_c + t_t = \frac{T}{2}$

$$\Rightarrow d \times \sqrt{\frac{2m_p}{eU}} + \frac{L}{\sqrt{\frac{2eU}{m_p}}} = \frac{T}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{2m_p}{eU}} \left(d + \frac{L}{2} \right) = \frac{T}{2}$$

$$\Leftrightarrow d + \frac{L}{2} = \frac{T}{2} \times \sqrt{\frac{eU}{2m_p}}$$

$$\Leftrightarrow L = T \times \sqrt{\frac{eU}{2m_p}} - 2d$$

$L = 19{,}2$ cm

3. Dans chaque cavité, la particule est accélérée. Mais le temps qu'elle doit mettre pour parcourir la cavité + le tube qui suit est constant, c'est $T/2$. Une solution est de rendre les tubes de plus en plus longs pour que le temps passé $t_{c_i} = \frac{L_i \nearrow}{v(t_{c_i}) \nearrow}$ reste le même !

4. Energie apportée par une cavité :

On applique le théorème de l'énergie cinétique

$$\Delta E_c = W_d(\vec{F_e}) = eE \times d = e\frac{|U|}{d} \times d$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta E_c = e|U|}$$

Chaque cavité apporte donc la même énergie $e|U|$!

On $\boxed{e|U|} = (1,60 \times 10^{-19}\ C) \times (2,00 \times 10^{6}\ V)$

$$= 1,60 \times 10^{-19} \times 2,00 \times 10^{6}\ J$$

$$= 2,00 \times 10^{6} \times \underbrace{1,60 \times 10^{-19}\ J}$$

$$= 2,00 \times 10^{6} \times 1,00\ eV$$

$$= \boxed{2,00\ MeV}$$

Un proton accéléré par une tension de 1 V voit son énergie augmenter de 1 eV (électronvolt)

Pour obtenir 50,0 MeV, il faut donc bien $\boxed{\frac{50,0}{2,00}} = \boxed{25 \text{ cavités}}$!

5. **À chaque tour de boucle :**

- on ajoute 2,00 MeV à l'énergie (l.20)
- on affiche la valeur de l'énergie atteinte (l.21)
- on calcule la nouvelle vitesse atteinte (l.22)
- on calcule la taille du nouveau tube (l.23)
- on affiche cette taille (l.24)
- on ajoute la taille du tube et d'une cavité à la taille totale de l'accélérateur (l.25)

On voit que pour calculer la nouvelle vitesse à la ligne 22, on utilise une fonction à laquelle on fournit la vitesse avant d'entrer dans la cavité et qui retourne la vitesse en sortie de la cavité.

Dans la boucle, la vitesse en entrée est notée v0 et celle en sortie v1. Et la valeur de v0 est initialisé à 0 avant la boucle.

Si on n'écrit rien à la ligne 26, v0 continuera à valoir 0 et le v1 calculé sera toujours le même.

=> Il faut mettre à jour en fin de boucle la valeur de v0 avec la valeur de v1 calculée.

=> l. 26 : `v0 = v1`