

Document 1 : une petite expérience

On trouve dans le livre "Système 1 / Système 2. Les deux vitesses de la pensée" du prix Nobel d'économie Daniel Kahneman l'expérience suivante :

On présente à un amphi le portrait de Steve ci-dessous :

« Steve est très timide et réservé, toujours prêt à rendre service, mais sans vraiment s'intéresser aux gens ou à la réalité. Personnalité docile et méticuleuse, il a besoin d'ordre et de structure, et se passionne pour les détails. »

Puis on demande à l'audience si Steve est plus susceptible d'être bibliothécaire ou agriculteur.

Document 2 : théorème de Bayes

Soit $P(H)$ la **probabilité a priori** d'une hypothèse H .

Et soit I une information nouvelle susceptible de modifier $P(H)$.

La **probabilité a posteriori** de l'hypothèse H sachant l'information I , notée $P(H|I)$, est donnée par le **théorème de Bayes** :

$$P(H|I) = \frac{P(I|H) \times P(H)}{P(I)} = \frac{P(I|H) \times P(H)}{P(I|H) \times P(H) + P(I|\bar{H}) \times P(\bar{H})}$$

où $P(I)$ est la probabilité que I soit vraie (que l'hypothèse H soit vraie ou fausse), $P(I|H)$ est la probabilité d'avoir I si H est vraie et $P(I|\bar{H})$ est la probabilité d'avoir I si H est fausse.

On va tâcher d'utiliser le théorème de Bayes pour répondre à la question du document 1.

1. Quelle est l'hypothèse H et quelle est l'information I dans le contexte du document 1 ?
2. Que vaut $P(H)$ aux États-Unis sachant qu'il s'y trouve 20 fois plus d'agriculteurs que de bibliothécaires ?
2. Supposons que le portrait de Steve corresponde à 40% des bibliothécaires et à 5% des agriculteurs, que vaut $P(I|H)$ et $P(I|\bar{H})$?
3. Appliquez le théorème de Bayes pour répondre à la question posée.
4. La probabilité que le portrait corresponde à un bibliothécaire devrait être combien de fois supérieure à celle qu'il corresponde à un agriculteur pour faire basculer la probabilité a posteriori que Steve soit bibliothécaire au-delà de 50% ? Comparez au ratio bibliothécaires sur agriculteurs.